

LAPORAN PENELITIAN
PELABELAN VERTEX GRACEFUL PADA GRAF-(5,7)



Peneliti:
Gema Hista Medika, M.Si

FAKULTAS TARBIYAH DAN ILMU KEGURUAN (FTIK)
UIN SJECH M. DJAMIL DJAMBEK BUKITTINGGI
2024

Pelabelan Vertex Graceful pada Graf-(5,7)

I. Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu yang berperan penting dalam kehidupan sehari-hari. Banyak sekali permasalahan dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus atau teorema. Seiring perkembangan ilmu pengetahuan banyak bermunculan penggunaan model matematika ataupun penalaran matematika sebagai alat untuk membantu permasalahan dalam berbagai disiplin ilmu. Salah satu cabang ilmu matematika yang banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736. Ketika itu Euler berupaya memecahkan masalah jembatan Königsberg yang berada di Eropa. Masalah jembatan Königsberg adalah apakah mungkin untuk melewati tujuh jembatan yang ada di kota Königsberg tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Dalam memecahkan masalah tersebut, Euler mempresentasikan daratan yang dihubungkan jembatan dengan titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan sisi (*edge*). Dengan menggunakan model tersebut, Euler menyimpulkan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula.

Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang berkembang sangat pesat. Salah satu topik dari teori graf yang banyak mendapat perhatian adalah pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadhana pada tahun 1964, dilanjutkan Stewart pada tahun 1966 dan Kotzig pada tahun 1970. Sampai saat ini pemanfaatan kajian pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, diantaranya pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, penyimpanan data komputer, navigasi geografis, radar serta desain integrated circuit pada komponen elektronik.

Pelabelan pada suatu graf merupakan sebarang fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Pelabelan graceful merupakan salah satu pelabelan yang sangat terkenal. Terdapat beberapa macam pelabelan graceful, diantaranya yaitu pelabelan graceful titik,

pelabelan graceful sisi, pelabelan super sisi graceful, pelabelan graceful kuat, dan masih banyak lagi.

Penelitian terkait dengan pelabelan graceful sudah banyak dilakukan, diantaranya: Pelabelan Super Graceful untuk Beberapa Graf Khusus oleh Anjani dkk (2012) [1]; Graf Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel Oleh Sari dkk (2013) [2]; Pelabelan Graceful Sisi Pada Graf Komplit, Pelabelan Graceful Ganjil Pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang oleh Bantara dkk (2018) [3]; Pelabelan Vertex-Graceful pada Beberapa Graf oleh Medika (2019) [4]; Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs oleh Maryana (2022) [5]; Pelabelan Vertex-Graceful pada Graf-(6,8) oleh Medika dkk (2022) [6]; Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus oleh Affifah dkk (2023) [7].

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk meneliti tentang Pelabelan Vertex Graceful pada Graf-(5,7).

II. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimana menentukan Pelabelan vertex graceful pada graf-(5,7)?”.

III. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan Pelabelan vertex graceful pada graf-(5,7).

IV. Kajian Terdahulu yang Relevan (*Literature Review*)

Kajian terdahulu yang relevan terkait dengan pelabelan graf telah banyak dilakukan, diantaranya:

No.	Nama dan Tahun Penerbitan	Judul Penelitian	Hasil Penelitian	Persamaan	Perbedaan
1	Anjani dkk, 2012 [1]	Pelabelan Super Graceful untuk	Pada penelitian ini diperoleh setiap himpunan titik berlabel ganjil dan himpunan	Penelitian ini sama-sama menentukan	Fokus penelitian ini adalah Pelabelan

		Beberapa Graf Khusus	sisinya berlabel genap, kecuali untuk graf C_n dan graf K_{nm} . Untuk graf C_n tidak memiliki himpunan label sisi genap dan himpunan label titik ganjil karena pada graf C_n jumlah banyaknya titik dan sisi bernilai genap, maka label titiknya tidak semuanya bernilai ganjil begitu juga dengan graf K_{nm} , yang memiliki jumlah banyaknya titik dan sisi dapat bernilai ganjil atau genap maka label titiknya tidak semuanya bernilai ganjil.	pelabelan graceful	Super Graceful pada graf C_n dan graf K_{mn}
2	Sari dkk, 2013 [2]	Pelabelan Graceful Sisi Pada Graf Komplit, Graf Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel	Pada penelitian ini diperoleh pelabelan graceful sisi pada beberapa jenis graf sederhana, yaitu graf komplit, graf komplit reguler k-partit, graf roda, graf bisikel, dan graf trisikel.	Penelitian ini sama-sama menentukan pelabelan graceful.	Fokus penelitian ini adalah pelabelan graceful sisi pada beberapa jenis graf sederhana, yaitu graf komplit, graf komplit reguler k-partit, graf

					roda, graf bisikel, dan graf trisikel
3	Bantara dkk, 2018 [3]	Pelabelan Graceful Ganjil pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang	Pada penelitian ini diperoleh graf duplikasi bintang $D2(K1,n)$ untuk $n \geq 2$, dan graf split bintang $spl(K1,n)$ untuk $n \geq 2$ untuk n genap, adalah pelabelan graceful ganjil.	Penelitian ini sama-sama menentukan pelabelan graceful	Fokus penelitian ini Pelabelan Graceful Ganjil pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang
4	Medika, 2019 [4]	Pelabelan Vertex-Graceful pada Beberapa Graf	Pada penelitian ini diperoleh bahwa terdapat 1 graf-(4,5), 3 graf-(5,6) serta 14 graf-(6,7) yang merupakan pelabelan vertex graceful	Penelitian ini sama-sama menentukan pelabelan vertex graceful	Fokus penelitian ini adalah pelabelan vertex graceful pada graf-(4,5), graf-(5,6) dan juga graf-(6,7)
5	Maryana, 2022 [5]	Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs	Pada penelitian ini ditemukan kontruksi pelabelan graceful pada graf thorny-Snake	Penelitian ini sama-sama menemukan pelabelan graceful	penelitian ini menemukan kontruksi pelabelan graceful pada graf thorny-Snake
6	Medika dkk, 2022 [6]	Pelabelan Vertex-Graceful pada Graf-(6,8)	Pada penelitian ini diperoleh bahwa diantara 20 graf-(6,8) yang tidak isomorfik terdapat 10 graf yang merupakan pelabelan	Penelitian ini sama-sama menentukan pelabelan vertex graceful	Fokus penelitian ini adalah pelabelan vertex graceful pada graf-(6,8)

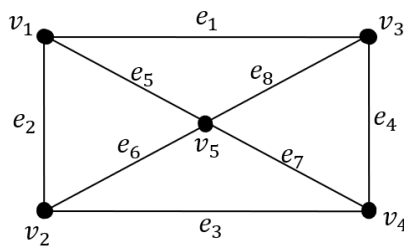
			Vertex graceful yaitu J1, J3, J4, J5, J8, J15, J16, J17, J18, dan J19		
7	Affifah dkk, 2023[7]	Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus	Pada penelitian ini akan ditunjukkan konstruksi pelabelan anggun pada graf berlian rangkap berbintang , beberapa kelas graf pohon dan graf corona khusus ($K_{(n,n)} \odot K_1$).	Penelitian ini sama-sama menemukan pelabelan graceful (anggun)	Fokus penelitian ini adalah Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus

V. Konsep atau Teori Relevan

Pada bagian ini akan diperkenalkan konsep-konsep dasar, definisi dan notasi termasuk istilah-istilah dalam teori graf dan beberapa jenis graf serta pengertian dari fungsi dan pelabelan secara umum.

5.1 Definisi dan Notasi

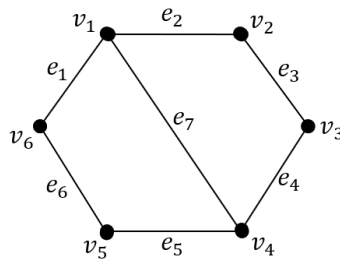
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan titik-titik (*vertices* atau *node*) di G dan E adalah himpunan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan dua titik di G . Himpunan titik-titik pada G dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan sisi-sisi pada G dinotasikan dengan $E(G)$ [8]. Jadi, G yang terdiri dari p titik dan q sisi dapat ditulis $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ dengan $v_j, v_k \in V(G)$, $j \neq k$ dan $j, k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Banyak titik yang ada pada G adalah $|V(G)|$, dan disebut **orde** dari G , sedangkan banyak sisi pada G adalah $|E(G)|$, dan disebut **ukuran** dari G , sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 5.1.1.



Gambar 5.1.1 Graf G_1

Misal graf G_1 mempunyai titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Jadi, $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$.

Jika sisi $e = (u, v)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u disebut **bertetangga** dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan v , juga titik u dan v dikatakan terkait dengan sisi e . Banyak sisi yang terkait dengan titik v dinamakan **derajat** titik v , ditulis $d(v)$.



Gambar 5.1.2 Graf G_2

Pada graf G_2 , titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 , v_6 , dan v_4 , tetapi tidak bertetangga dengan titik v_5 dan v_3 . Sisi e_2 terkait dengan titik v_1 dan v_2 .

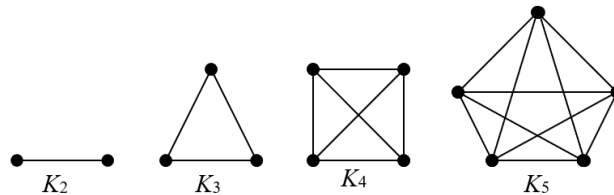
Suatu sisi e disebut **loop**, jika $e = (v, v)$ untuk suatu $v \in V(G)$. Suatu sisi disebut **sisi ganda** (*multiple edge*), jika terdapat lebih dari satu sisi yang terkait dengan 2 titik. Graf G disebut **graf sederhana** jika G tidak memuat *loop* atau sisi ganda. Suatu graf G yang tidak sederhana disebut **pseudograph**. Graf yang jumlah titiknya n berhingga disebut **graf berhingga**. Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan **isomorf** jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik di G_1 dan titik di G_2 . Untuk selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman, permasalahan dibatasi pada graf-(6,8) yang merupakan graf sederhana terhubung berhingga.

5.2 Jenis-Jenis Graf

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang sering ditemukan:[9]

a. Graf Lengkap

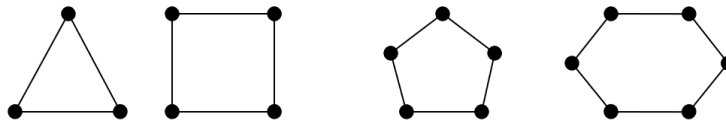
Graf Lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n .



Gambar 5.2.1 Graf Lengkap

b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n . Gambar 5.2.2 merupakan gambar graf lingkaran C_n , dengan $3 \leq n \leq 6$.



Gambar 5.2.2 Graf Lingkaran

5.3 Fungsi

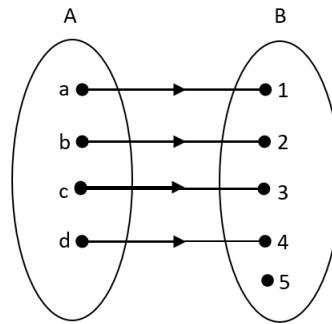
Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut fungsi dari himpunan A ke himpunan B . Fungsi dari himpunan A ke himpunan B diberi notasi f , yaitu: $f: A \rightarrow B$.

Selanjutnya, himpunan A disebut sebagai daerah asal (*domain*) dan himpunan B disebut daerah kawan (*kodomain*). Secara umum, fungsi dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut:[10]

(1) **Fungsi satu-satu** (*injektif*) adalah fungsi dimana setiap elemen di daerah *kodomain* yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah *domain*, dapat dituliskan secara matematika sebagai berikut:

$f: A \rightarrow B$ dikatakan *injektif* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Contoh:

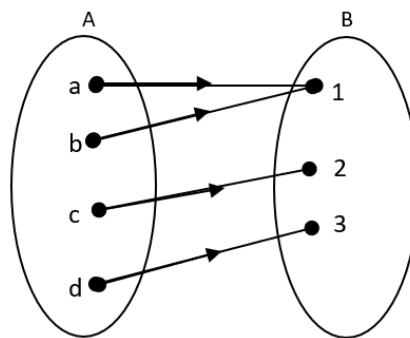


Gambar 5.3.1 Fungsi *injektif*

(2) **Fungsi pada** (*surjektif*) adalah fungsi dimana semua elemen di daerah *kodomain* mempunyai pasangan elemen di daerah *domain*, dapat dituliskan secara matematika berikut:

$$f: A \rightarrow B \text{ dikatakan surjektif} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)$$

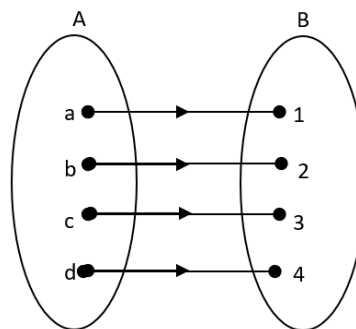
Contoh:



Gambar 5.3.2 Fungsi *surjektif*

(3) **Fungsi korespondensi satu-satu** (*bijektif*) adalah fungsi yang memenuhi fungsi *injektif* dan fungsi *surjektif*.

Contoh:



Gambar 5.3.3 Fungsi *bijektif*

4.4 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang fungsi *bijektif* yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif [11]. Jika *domain* dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika *domain* nya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*) [12].

Suatu graf G dengan p titik dan q sisi adalah **pelabelan graceful** jika terdapat fungsi *injektif* $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, q\}$ sehingga $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(e_i) = |f(v_j) - f(v_k)|$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ merupakan fungsi *surjektif* [13].

Suatu graf G dikatakan **pelabelan vertex graceful** jika ada pelabelan $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ sedemikian sehingga terdapat pelabelan $f^+: E(G) \rightarrow Z_q$ yang didefinisikan dari $f^+((v_j, v_k)) = (f(v_j) + f(v_k)) \bmod q$ yang merupakan fungsi *bijektif* [13]. Adapun contoh untuk pelabelan vertex graceful adalah sebagai berikut:

Diberikan graf $C_4 \cup K_1$ dengan orde 5, akan ditunjukkan graf tersebut mempunyai pelabelan vertex graceful.

Jawab:

Misalkan $V(C_4 \cup K_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan definisikan

$$f: V(C_4 \cup K_1) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 4,$$

$$v_3 \mapsto 2,$$

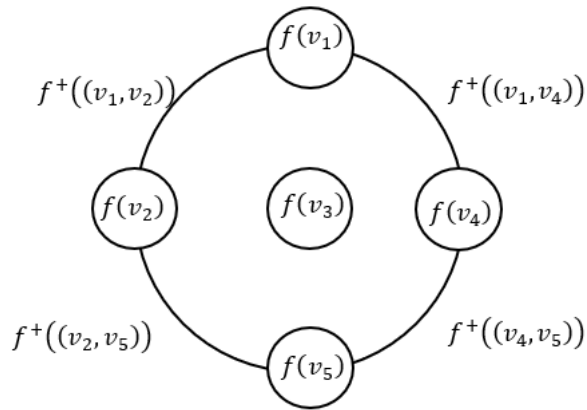
$$v_4 \mapsto 5,$$

$$v_5 \mapsto 3,$$

dan $f^+: E(C_4 \cup K_1) \rightarrow Z_q$ dimana $q = 4$.

$$(v_j, v_k) \mapsto (f(v_j) + f(v_k)) \bmod 4, \quad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan vertex graceful.



Gambar 5.4.1 Ilustrasi Pelabelan vertex graceful Graf $C_4 \cup K_1$ dengan Orde 5

Dari definisi fungsi diperoleh

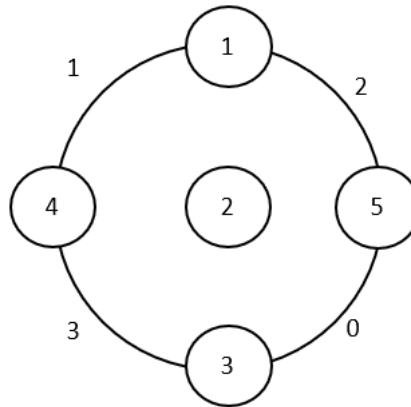
$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \bmod 4 = (1 + 4) \bmod 4 = 1$$

$$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4)) \bmod 4 = (1 + 5) \bmod 4 = 2$$

$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5)) \bmod 4 = (4 + 3) \bmod 4 = 3$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \bmod 4 = (5 + 3) \bmod 4 = 0.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 5.4.2 Graf $C_4 \cup K_1$ adalah Pelabelan vertex graceful

Karena $f^+: E(C_4 \cup K_1) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ merupakan fungsi *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan vertex graceful.

VI. Metodologi Penelitian

A. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif. Istilah deskriptif berasal dari Bahasa Inggris *to describe* yang berarti

memaparkan atau menggambarkan sesuatu hal, misalnya keadaan, kondisi, situasi, peristiwa, kegiatan dan lain-lain. Jadi yang dimaksud dengan penelitian deskriptif adalah penelitian yang dimaksudkan untuk menyelidiki keadaan, kondisi atau hal lain yang sudah disebutkan, yang hasilnya dipaparkan dalam bentuk laporan penelitian. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dimana penelitian kualitatif dilaksanakan untuk membangun pengetahuan melalui pemahaman dan penemuan. Pendekatan penelitian kualitatif adalah suatu proses penelitian dan pemahaman yang berdasarkan pada metode yang menyelidiki suatu fenomena sosial dan masalah manusia.

Lebih lanjut jenis penelitiannya adalah penelitian deskriptif kualitatif. Penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan kata-kata atau kalimat dari individu, buku dan sumber lain [14]. Tujuan utama penelitian kualitatif adalah untuk memahami dan mengeksplorasi fenomena utama pada obyek yang diteliti sehingga memperoleh pemahaman yang mendalam dan menemukan sesuatu yang unik [15].

B. Subjek Penelitian

Subjek penelitian ini adalah pelabelan vertex graceful dan graf-(5,7). Sumber penelitian ada dua yaitu sumber primer dan sumber sekunder. Sumber data primer merupakan data yang di dapatkan secara langsung dari penelitian dilapangan. Menurut Mustafa, data yang diperoleh oleh peneliti secara langsung dari sumber datanya, yakni data primer disebut juga dengan data asli atau data baru yang memiliki sifat *up to date*. Data sekunder merupakan data yang diperoleh atau dikumpulkan oleh peneliti dari berbagai sumber yang telah ada, yakni dapat diperoleh melalui berbagai media mulai dari buku, laporan, jurnal, dll. Sumber data primer adalah buku dan literatur yang berkaitan dengan pelabelan vertex graceful dan graf-(5,7). Sedangkan sumber data sekunder adalah beberapa buku, jurnal, tugas akhir dan literatur ilmiah yang mendukung dan berhubungan dengan penelitian ini.

C. Teknik Pengumpulan Data

Teknik yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi Pustaka (*study literature*), yaitu sebuah proses mencari, membaca, memahami dan menganalisis berbagai literatur, hasil kajian (hasil penelitian) atau studi yang berhubungan

dengan penelitian yang akan dilakukan [14]. Dengan memahami beberapa buku, jurnal, tugas akhir dan pustaka-pustaka lain yang melandasi teori tentang pelabelan vertex graceful seperti tertera dalam daftar pustaka serta mencoba latihan-latihan.

Studi pustaka merupakan teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaah terhadap buku-buku, literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan. Teknik ini digunakan untuk memperoleh dasar-dasar dan pendapat secara tertulis yang dilakukan dengan cara mempelajari berbagai literatur yang berhubungan dengan masalah yang diteliti. Hal ini juga dilakukan untuk mendapatkan data sekunder yang akan digunakan sebagai landasan perbandingan antara teori dan praktiknya di lapangan.

Adapun Langkah-langkah yang digunakan dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut: (a) Terlebih dahulu peneliti akan menjabarkan konsep-konsep dasar, definisi dan notasi termasuk istilah-istilah dalam teori graf dan beberapa jenis graf. (b) Peneliti juga akan memberikan definisi pelabelan graceful secara umum. (c) Selanjutnya, peneliti akan membahas tentang Pelabelan vertex graceful pada graf-(5,7).

D. Teknik Analisis Data

Teknik analisis data yang digunakan adalah teknik analisis data non statistic yaitu dengan cara dipaparkan, ditabulasi dan ditafsirkan atau disimpulkan. Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: (1) Menentukan jumlah graf yang berbeda (tidak isomorfik) pada graf-(5,7); (2) Menotasikan titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) pada graf-(5,7); (3) Menentukan segala kemungkinan susunan titik (*vertex*) pada graf-(5,7) yang terjadi; (4) Melabeli titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) pada graf-(5,7) sesuai dengan syarat pelabelan vertex graceful; (5) Menganalisa pola untuk merumuskan pelabelan vertex graceful; (6) Menentukan mana graf yang merupakan pelabelan vertex graceful.

VII. Rencana Pembahasan

Adapun rencana pembahasan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan jumlah graf yang berbeda (tidak isomorfik) pada graf-(5,7)
2. Menotasikan titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) pada graf-(5,7)
3. Menentukan segala kemungkinan susunan titik (*vertex*) pada graf-(5,7) yang terjadi
4. Melabeli titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) pada graf-(5,7) sesuai dengan syarat pelabelan vertex graceful.
5. Menganalisa pola untuk merumuskan pelabelan vertex graceful.
6. Menentukan mana graf yang merupakan pelabelan vertex graceful.

VIII. Daftar Pustaka

- [1] B. Anjani, Primas Tri Anjar, Heri, Robertus, & Surarso, "Pelabelan Super Graceful Untuk Beberapa Graf Khusus," pp. 183–203, 2012.
- [2] B. R. Dian Noer Indah Sari, "Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel," pp. 1–7, 2013.
- [3] J. A. Bantara, I. W. Sudarsana, and S. Musdalifah, "Pelabelan Graceful Ganjil Pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang," *J. Ilm. Mat. Dan Terap.*, vol. 15, no. 1, pp. 28–35, 2018, doi: 10.22487/2540766x.2018.v15.i1.10193.
- [4] G. H. Medika, "Pelabelan Vertex-Graceful Pada Beberapa Graf," in *Prosiding Seminar Nasional STKIP PGRI Sumatera Barat*, 2019, pp. 54–65. [Online]. Available: <http://econference.stkip-pgri-sumbar.ac.id/index.php/matematika/IPME/paper/view/761>
- [5] Maryana and K. A. Sugeng, "Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs," *THETA J. Pendidik. Mat.*, vol. 3, no. 2, pp. 55–58, 2022, doi: <https://doi.org/10.35747/t.v3i2.137>.
- [6] G. H. Medika and Z. B. Tomi, "Pelabelan vertex-graceful pada graf-(6,8)," vol. 6, no. 1, pp. 63–70, 2022.
- [7] L. Affifah and I. K. Budayasa, "Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus," *MATHunesa J. Ilm. Mat.*, vol. 11, no. 3, pp. 368–382, 2023.
- [8] N. Hartsfield and G. Ringel, *Pearls in Graph Theory*. San Diego: Academic Press, 1990.
- [9] R. Munir, *Matematika Diskrit Edisi ke 3*. Bandung: Informatika, 2005.

- [10] B. R. G and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- [11] M. Baca and M. Miller, *Super Edge-Antimagic Graph : A Wealth of Problems and Solutions*. Florida, USA: Brown Walker Press Boca Raton, 2008.
- [12] M. Miller, "Open Problems in Graph Theory : Labeling and Extremal Graph," 2000.
- [13] S.-M. Lee, Y.C.Pan, and M.-C. Tsai, "On vertex-graceful $(p,p+1)$ -graphs," 2005, p. 172.
- [14] N. Martono, *Metode penelitian kuantitatif: analisis isi dan analisis data sekunder*. Jakarta: Rajawali Pers, 2014.
- [15] Sugiyono, *Metode penelitian kualitatif: (untuk penelitian yang bersifat : eksploratif, enterpretif, interaktif dan konstruktif)*. Bandung: Alfabeta, 2020.

Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Graf-(5,7)

Gema Hista Medika¹, Zebbil Billian Tomi², Mhd Furqan Akbar^{3*}, Fifian Fitra Janeva⁴,
Nuryanuwar⁵

^{1,2}Universitas Islam Negeri Sjech M Djamil Djambek Bukittinggi, Bukittinggi, Indonesia

³Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), Surabaya, Indonesia

⁴Universitas Trisakti, Jakarta, Indonesia

⁵Universitas Fort De Kock Bukittinggi, Bukittinggi, Indonesia

*Corresponding Author

Informasi Artikel

Diterima Redaksi: 30 Mei 2024

Revisi Akhir: 29 Juni 2024

Diterbitkan Online: 30 Juni 2024

Kata Kunci

Pelabelan

Pelabelan *Vertex-Graceful*

Graf-(5,7)

Korespondensi

E-mail: mhdfurqanakbar@gmail.com*

A B S T R A C T

Several previous studies on graceful vertex labeling have been conducted. This study aims to identify graceful vertex labeling on a (5,7)-graph, which consists of 5 vertices and 7 edges. The focus of this study is on a simple and finitely connected (5,7)-graph. This type of research is descriptive qualitative, using literature study techniques and non-statistical data analysis. The results show that of the 4 non-isomorphic (5,7)-graphs, all of the graphs meet the criteria for graceful vertex labeling, namely R1, R2, R3, and R4.

Beberapa studi sebelumnya mengenai pelabelan *vertex-graceful* telah dilakukan. Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7), yang terdiri dari 5 titik dan 7 sisi. Fokus penelitian ini adalah pada graf-(5,7) yang sederhana dan terhubung berhingga. Tipe penelitian ini adalah deskriptif kualitatif, menggunakan teknik studi pustaka dan analisis data non statistik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari 4 graf-(5,7) yang tidak isomorfik, semua grafnya memenuhi kriteria pelabelan *vertex-graceful*, yaitu R1, R2, R3, dan R4.



©2024 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA) (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

1. Pendahuluan

Salah satu ilmu yang berperan penting dalam kehidupan sehari-hari adalah matematika. Begitu banyak permasalahan yang diselesaikan dengan menggunakan rumus, pola/ model atau teorema matematika dalam kehidupan. Seiring perkembangan ilmu pengetahuan banyak bermunculan penggunaan rumus matematika ataupun penalaran matematika sebagai solusi untuk membantu permasalahan dalam berbagai disiplin ilmu. Salah satu bidang matematika yang banyak dimanfaatkan yaitu teori graf.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1936, merupakan seorang matematikawan yang berkebangsaan Swiss. Ketika itu Euler berupaya memecahkan masalah jembatan Königsberg yang berada di Eropa. Salah satu tema dari teori graf yang berkembang pesat yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf ini pertama kali diperkenalkan oleh Sadlak pada tahun 1964, dilanjutkan Stewart pada tahun 1966 dan Kotzig Rosa tahun 1970. Pemanfaatan pelabelan graf dapat diterapkan pada berbagai bidang keilmuan seperti teori pengkodean, radar, desain sirkuit, manajemen basis data, pertukaran pesan rahasia, dan kriptografi.

Pelabelan dari graf $G(V,E)$ merupakan suatu fungsi *bijektif* dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan asli (N). Dimana domain dari pelabelan merupakan pelabelan titik (atau pelabelan sisi). Jika domain merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka dinamakan pelabelan total [1]. Pelabelan yang sangat terkenal salah satunya adalah pelabelan *graceful*. Terdapat bermacam pelabelan *graceful*, diantaranya yaitu pelabelan *graceful* titik, pelabelan *graceful* sisi, pelabelan super sisi *graceful*, pelabelan *graceful* kuat, dan masih banyak lagi.

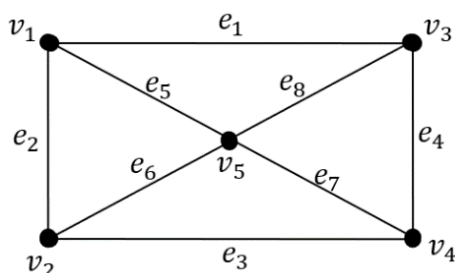
Penelitian terkait dengan pelabelan *graceful* sudah banyak dilakukan, diantaranya: Pelabelan *Super Graceful* untuk Beberapa Graf Khusus oleh Anjani dkk (2012) [2]; Graf Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel Oleh Sari dkk (2013) [3]; Pelabelan

Graceful Sisi Pada Graf Komplit, Pelabelan *Graceful* Ganjil Pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang oleh Bantara dkk (2018) [4]; *Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs* oleh Maryana (2022) [5]; Pelabelan *Odd-Graceful* Pada Graf Produk Sisir oleh Daniel dkk (2022) [6]; Kemampuan Mahasiswa dalam Membuktikan Teorema pada Pelabelan *Graceful Graph* A-Bintang oleh Sumardi dkk (2022)[7]; Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus oleh Affifah dkk (2023) [8]. Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan dari penelitian sebelumnya. Adapun beberapa penelitian tentang ini yang pernah peneliti lakukan yaitu Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Beberapa Graf oleh Medika (2019)[9] dan Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Graf-(6,8)[10]. Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, peneliti tertarik untuk mengkaji tentang Pelabelan *Vertex Graceful* pada Graf-(5,7). Rumusan masalah pada artikel ini berdasarkan latar belakang di atas, yaitu Bagaimana menentukan pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7)?.

Pada bagian ini akan diperkenalkan konsep-konsep dasar, pengertian, notasi dan istilah pada teori graf, serta beberapa jenis graf, definisi dari fungsi dan pelabelan secara umum.

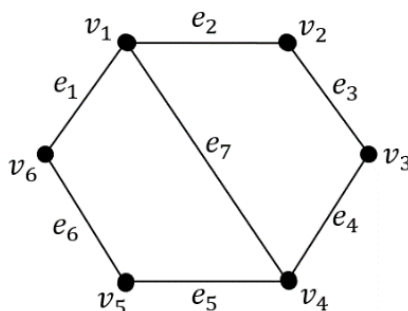
1.1 Definisi dan Notasi

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dinotasikan dengan $G = (V, E)$ dengan V merupakan himpunan titik-titik (*vertices* atau *node*) di G dan E merupakan himpunan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan dua titik di G . Himpunan titik-titik pada G dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan sisi-sisi pada G disimbolkan dengan $E(G)$ [11]. Jadi, G yang terdiri dari p titik dan q sisi dapat ditulis $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ dengan $v_j, v_k \in V(G)$, $j \neq k$ dan $j, k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Banyak titik yang terdapat pada graf G adalah $|V(G)|$, dikatakan dengan **orde** dari G , selanjutnya jumlah sisi pada graf G merupakan $|E(G)|$, disebut dengan **ukuran** dari G .



Gambar 1. Graf G_1

Pada Gambar 1 dimisalkan graf G_1 mempunyai titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Jadi, $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$. Jika sisi $e = (u, v)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u dikatakan **bertetangga** dengan titik v begitu juga sebaliknya. Dimana, sisi e disebut **terkait** dengan titik u dan v , juga titik u dan v disebut terkait dengan sisi e . Jumlah sisi yang terkait dengan titik v disebut **derajat** titik v , ditulis dengan $d(v)$.



Gambar 2 Graf G_2

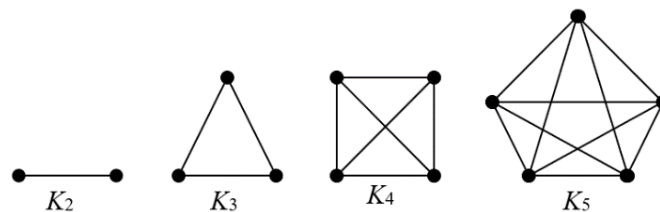
Pada graf G_2 , titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 , v_6 , dan v_4 , tetapi tidak bertetangga dengan titik v_5 dan v_3 . Sisi e_2 terkait dengan titik v_1 dan v_2 . Suatu sisi e dikatakan **loop**, jika $e = (v, v)$ untuk suatu $v \in V(G)$. Suatu sisi dikatakan **sisi ganda** (*multiple edge*), jika ada lebih dari satu sisi yang terkait dengan 2 titik. Graf G dikatakan **graf sederhana** jika graf G tidak memuat *loop* atau sisi ganda [12]. Suatu graf G yang tidak sederhana disebut **pseudograph**. Graf yang banyak titiknya n berhingga dikatakan **graf berhingga**. Dua buah graf G_1 dan G_2 disebut **isomorf** jika ada korespondensi satu-satu antara titik di G_1 dan titik di G_2 . Untuk selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman, permasalahan dibatasi pada graf-(5,7) yaitu graf dengan 5 titik dan 7 sisi, yang merupakan graf sederhana terhubung berhingga.

1.2 Jenis-Jenis Graf

Adapun beberapa jenis graf sederhana khusus yang sering ditemukan yaitu:[13]

a. Graf Lengkap

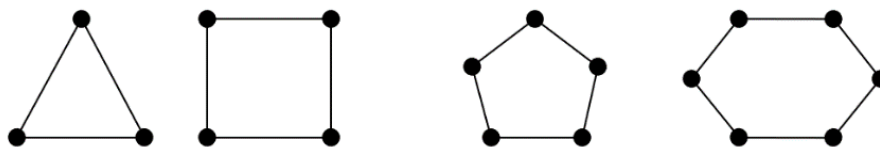
Graf Lengkap merupakan graf sederhana yang tiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan banyak n titik disimbolkan dengan K_n .



Gambar 3. Graf Lengkap

b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang tiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik disimbolkan dengan C_n . Gambar 4 adalah gambar graf lingkaran C_n , dengan $3 \leq n \leq 6$.



Gambar 4. Graf Lingkaran

1.3 Fungsi

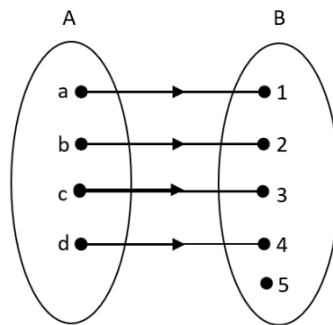
Misalkan A dan B merupakan dua himpunan yang tak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan tiap anggota dari himpunan A dengan tepat satu anggota di himpunan B dikatakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B . Fungsi dari himpunan A ke himpunan B diberi simbol f , yaitu: $f: A \rightarrow B$.

Selanjutnya, himpunan A dikatakan sebagai daerah/ wilayah asal (*domain*) dan himpunan B dikatakan sebagai daerah/ wilayah kawan (*kodomain*). Secara umum, fungsi terbagi menjadi tiga, yaitu:[14]

(1) **Fungsi satu-satu** (*injektif*) merupakan fungsi dimana setiap anggota di daerah *kodomain* yang mempunyai pasangan anggota tepat satu di wilayah *domain*, dalam matematika dapat ditulis sebagai berikut:

$$f: A \rightarrow B \text{ dikatakan injektif} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Contoh:

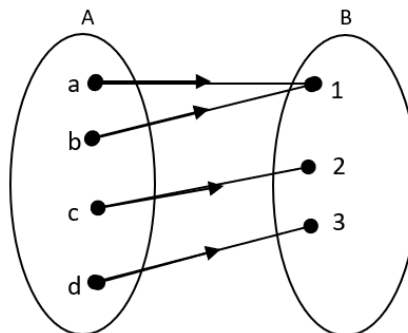


Gambar 5. Fungsi *injektif*

- (2) **Fungsi pada (surjektif)** merupakan fungsi dimana semua anggota di daerah *kodomain* yang mempunyai pasangan anggota di wilayah *domain*, dalam matematika dapat ditulis sebagai berikut:

$$f: A \rightarrow B \text{ dikatakan surjektif} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)$$

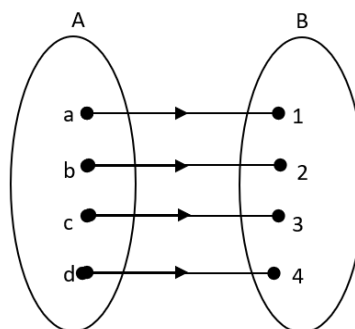
Contoh:



Gambar 6. Fungsi *surjektif*

- (3) **Fungsi satu-satu dan pada (bijektif)** adalah fungsi yang memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*) dan fungsi pada (*surjektif*).

Contoh:



Gambar 7. Fungsi *bijektif*

1.4 Pelabelan *Graceful*

Suatu graf G dengan banyak p titik dan q sisi merupakan **pelabelan graceful** jika ada fungsi *injektif* $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, q\}$ sehingga $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ yang didefinisikan sebagai $f^*(e_i) = |f(v_j) - f(v_k)|$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ adalah fungsi *surjektif* [15].

Suatu graf G disebut **pelabelan vertex-graceful** jika terdapat pelabelan $f:V(G) \rightarrow \{1,2,\dots,p\}$ sedemikian hingga ada pelabelan $f^+:E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_q$ yang didefinisikan dari $f^+((v_j, v_k)) = (f(v_j) + f(v_k)) \bmod q$ disebut fungsi *bijektif* [15]. Adapun contoh untuk pelabelan *vertex-graceful* adalah sebagai berikut:

Diberikan graf $C_4 \cup K_1$ dengan orde 5, akan ditunjukkan graf tersebut mempunyai pelabelan *vertex-graceful*.

Jawab:

Misalkan $V(C_4 \cup K_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan definisikan

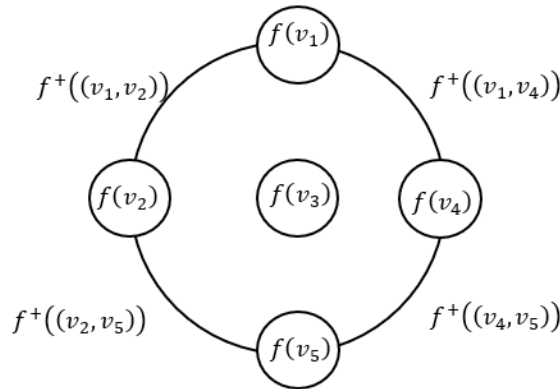
$$f: V(C_4 \cup K_1) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}.$$

$$v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 4, v_3 \mapsto 2, v_4 \mapsto 5, v_5 \mapsto 3,$$

dan $f^+: E(C_4 \cup K_1) \rightarrow \mathbb{Z}_q$ dimana $q = 4$.

$$(v_j, v_k) \mapsto (f(v_j) + f(v_k)) \bmod 4, \quad j \neq k.$$

Akan dibuktikan apakah pelabelan di atas adalah pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 8. Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf $C_4 \cup K_1$ dengan Orde 5

Dari definisi fungsi diperoleh

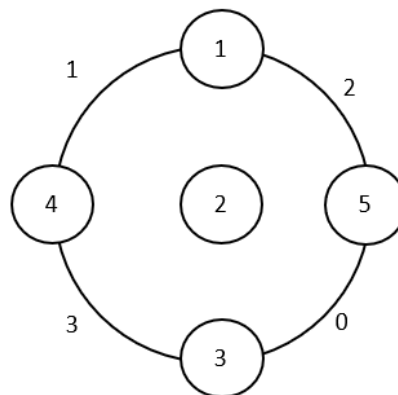
$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \bmod 4 = (1 + 4) \bmod 4 = 1$$

$$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4)) \bmod 4 = (1 + 5) \bmod 4 = 2$$

$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5)) \bmod 4 = (4 + 3) \bmod 4 = 3$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \bmod 4 = (5 + 3) \bmod 4 = 0$$

Dengan mensubstitusi nilai-nilai yang telah didapatkan, maka diperoleh graf yang sudah dilabeli seperti pada Gambar 9:



Gambar 9. Graf $C_4 \cup K_1$ adalah Pelabelan *vertex-graceful*

Karena $f^+: E(C_4 \cup K_1) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ merupakan fungsi *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

2. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Selain itu, jenis penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif. Penelitian deskriptif kualitatif ini dilakukan dengan mengumpulkan kata dan frasa dari individu, buku, dan sumber lain [16]. Tujuan utama penelitian kualitatif adalah memahami dan mengembangkan fenomena utama yang diteliti untuk mencapai pemahaman lebih dalam dan menemukan keunikannya [17].

Subjek penelitian ini yaitu pelabelan *vertex-graceful* dan juga graf-(5,7). Sumber data primer yaitu buku dan literatur yang berhubungan dengan pelabelan *vertex-graceful* dan juga graf-(5,7). Sedangkan sumber data sekunder yaitu beberapa buku, beberapa jurnal dan tugas akhir serta literatur ilmiah yang mendukung dan berkaitan dengan pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7) ini.

Teknik yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*study literature*), merupakan proses mencari, membaca, memahami dan menganalisis berbagai literatur yang berkaitan dengan hasil penelitian atau penelitian yang relevan dengan penelitian yang dilakukan [16]. Yaitu dengan memahami beberapa buku, beberapa jurnal dan tugas akhir serta pustaka-pustaka lain yang menjadi landasan teori yang berhubungan dengan pelabelan *vertex-graceful* seperti yang tercantum pada daftar pustaka dan juga mencoba latihan-latihan.

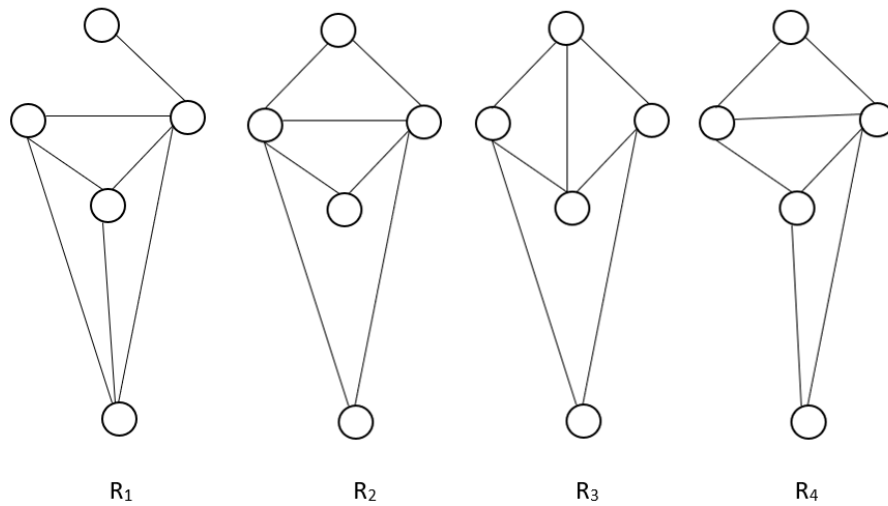
Berikut langkah-langkah yang dilaksanakan pada penelitian ini adalah: (a) Pertama-tama peneliti menjelaskan konsep-konsep dasar, pengertian, symbol serta istilah-istilah pada teori graf dan beberapa jenis graf sederhana. (b) Peneliti juga akan memberikan definisi pelabelan *graceful* secara umum. (c) Selanjutnya, peneliti akan membahas terkait pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7).

Teknik analisis data yang dipakai yaitu teknik analisis data *non statistic*, dimana Teknik ini dilakukan dengan cara dipaparkan, ditabulasi serta ditafsirkan/ disimpulkan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisis data pada penelitian ini yaitu: 1. Mendefinisikan graf-(5,7); 2. Menetapkan jumlah graf-(5,7) berbeda yang tidak *isomorf*; 3. Menerapkan operasi graf sesuai dengan definisi pelabelan *vertex-graceful*; 4. Melabeli semua titik dan sisi yang ada pada semua graf-(5,7) yang telah ditetapkan; 5. Menentukan graf-(5,7) yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*; 6. Melaporkan hasil.

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1

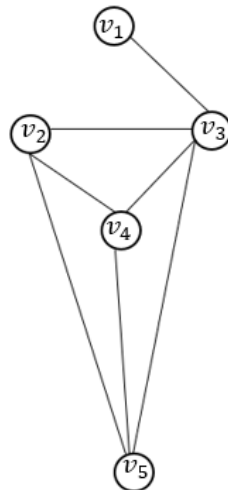
Diantara 4 graf-(5,7) seperti yang ditunjukkan pada Gambar semua grafnya merupakan pelabelan *vertex-graceful*



Gambar 10. Graf-(5,7)

Bukti.

- a. Untuk Graf R_1 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(R_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

Gambar 11. Graf R_1

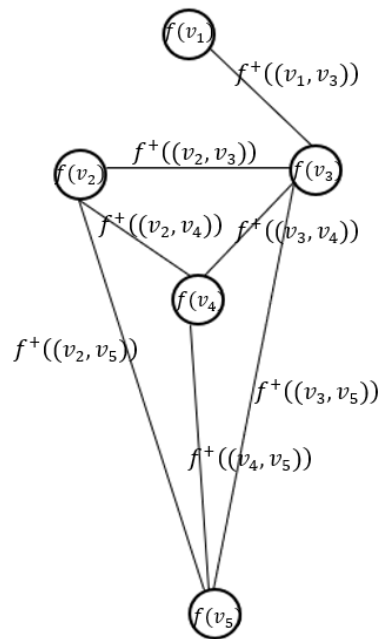
Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(R_1) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$

$v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 2, v_3 \mapsto 3, v_4 \mapsto 4, v_5 \mapsto 5,$

Dan $f^+: E(R_1) \rightarrow Z_q$ Dimana $q = 7.$

$(v_j, v_k) \mapsto (f(v_j) + f(v_k)) \bmod 7, j \neq k$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 12. Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1 (I)*

(I) Menyatakan kemungkinan pertama dari Graf R1

Dari definisi fungsi diperoleh

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3)) \bmod 7 = (1 + 3) \bmod 7 = 4$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \bmod 7 = (2 + 3) \bmod 7 = 5$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4)) \bmod 7 = (2 + 4) \bmod 7 = 6$$

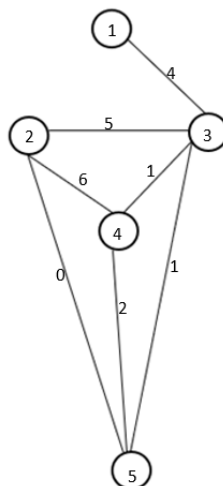
$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5)) \bmod 7 = (2 + 5) \bmod 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4)) \bmod 7 = (3 + 4) \bmod 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \bmod 7 = (3 + 5) \bmod 7 = 1$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \bmod 7 = (4 + 5) \bmod 7 = 2$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 13. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1 (I) yang sudah dilabeli (I)

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat ditulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 1. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1 (I)

f					f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	4	5	6	0	0	1	2	Tidak

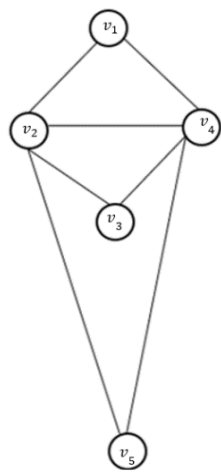
Keterangan:
“Tidak” berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label/angka yang sama.
Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 12 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

Tabel 2. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1

v1	v2	v3	v4	v5	v1v3	v2v3	v2v4	v2v5	v3v4	v3v5	v4v5
2	3	1	4	5	3	4	0	1	5	6	2
2	3	1	5	4	3	4	1	0	6	5	2
2	4	1	3	5	3	5	0	2	4	6	1
2	4	1	5	3	3	5	2	0	6	4	1
2	5	1	3	4	3	6	1	2	4	5	0
2	5	1	4	3	3	6	2	1	5	4	0
4	1	5	2	3	2	6	3	4	0	1	5
4	1	5	3	2	2	6	4	3	1	0	5
4	2	5	1	3	2	0	3	5	6	1	4
4	2	5	3	1	2	0	5	3	1	6	4
4	3	5	1	2	2	1	4	5	6	0	3
4	3	5	2	1	2	1	5	4	0	6	3

Dari Tabel 3 dapat dilihat bahwa pada graf R1 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R1 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

b. Untuk Graf R_2 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(R_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 14. Graf R_2

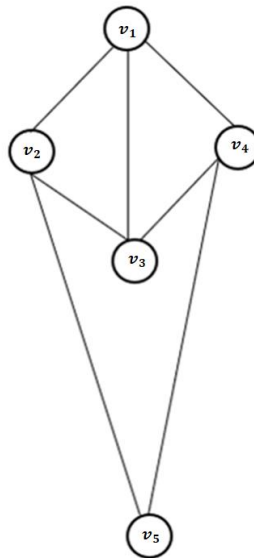
Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 12 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

Tabel 3. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R_2

v1	v2	v3	v4	v5	v1,v2	v1,v4	v2,v3	v2,v4	v2,v5	v3,v4	v4,v5
2	1	3	5	4	3	0	4	6	5	1	2
2	1	4	5	3	3	0	5	6	4	2	1
2	5	3	1	4	0	3	1	6	2	4	5
2	5	4	1	3	0	3	2	6	1	5	4
3	1	2	5	4	4	1	3	6	5	0	2
3	1	4	5	2	4	1	5	6	3	2	0
3	5	2	1	4	1	4	0	6	2	3	5
3	5	4	1	2	1	4	2	6	0	5	3
4	1	2	5	3	5	2	3	6	4	0	1
4	1	3	5	2	5	2	4	6	3	1	0
4	5	2	1	3	2	5	0	6	1	3	4
4	5	3	1	2	2	5	1	6	0	4	3

Dari Tabel 4 dapat dilihat bahwa pada graf R_2 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R_2 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

c. Untuk Graf R_3 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(R_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 15. Graf R_3

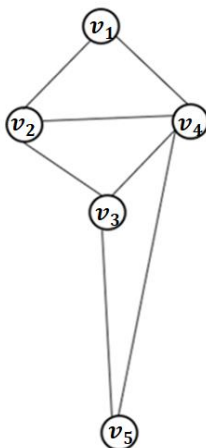
Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 13 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

Tabel 4. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R_3

v1	v2	v3	v4	v5	v1,v2	v1,v3	v1,v4	v2,v3	v2,v4	v3,v4	v4,v5
1	2	3	4	5	3	4	5	5	6	0	2
1	2	3	5	4	3	4	6	5	0	1	2
1	3	2	5	4	4	3	6	5	1	0	2
2	1	3	5	4	3	5	0	4	6	1	2
2	3	1	5	4	5	3	0	4	1	6	2
3	1	2	5	4	4	5	1	3	6	0	2
3	2	1	5	4	5	4	1	3	0	6	2
3	4	5	1	2	0	1	4	2	5	6	3
3	5	4	1	2	1	0	4	2	6	5	3
4	3	5	1	2	0	2	5	1	4	6	3
4	5	3	1	2	2	0	5	1	6	4	3
5	3	4	1	2	1	2	6	0	4	5	3
5	4	3	1	2	2	1	6	0	5	4	3

Dari Tabel 4 dapat dilihat bahwa pada graf R_3 terdapat 13 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R_3 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

- d. Untuk Graf R_4 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(R_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 16. Graf R_4

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 8 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

Tabel 5. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R_4

v1	v2	v3	v4	v5	v1,v2	v1,v4	v2,v3	v2,v4	v3,v4	v3,v5	v4,v5
1	2	4	3	5	3	4	6	5	0	2	1
1	3	5	2	4	4	3	1	5	0	2	6
2	1	3	4	5	3	6	4	5	0	1	2
2	1	5	3	4	3	5	6	4	1	2	0
4	5	1	3	2	2	0	6	1	4	3	5
4	5	3	2	1	2	6	1	0	5	4	3
5	3	1	4	2	1	2	4	0	5	3	6
5	4	2	3	1	2	1	6	0	5	3	4

Dari Tabel 5 dapat dilihat bahwa pada graf R_4 terdapat 8 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R_4 merupakan pelabelan *vertex-graceful*. Jadi dari 4 graf-(5,7) semuanya merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah didapatkan maka disimpulkan bahwa pada graf-(5,7) semuanya merupakan pelabelan *vertex-graceful* yaitu R_1 , R_2 , R_3 , dan R_4 . Pada masing-masing graf terdapat 120 kemungkinan, dimana pada R_1 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*, R_2 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*, R_3 terdapat 13 pelabelan *vertex-graceful* dan R_4 terdapat 8 pelabelan *vertex-graceful*. Adapun saran peneliti untuk penelitian selanjutnya agar meneliti pelabelan *vertex-graceful* pada graf $(n, n+2)$.

Daftar Pustaka

- [1] M. Miller, "Open Problems in Graph Theory: Labeling and Extremal Graph," 2000.
- [2] B. Anjani, Primas Tri Anjar, Heri, Robertus, & Surarso, "Pelabelan Super Graceful Untuk Beberapa Graf Khusus," pp. 183–203, 2012, [Online]. Available:

- <https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/matematika/article/view/1238>
- [3] B. R. Dian Noer Indah Sari, "Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel," pp. 1–7, 2013, [Online]. Available: <https://ejournal.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/2637>
- [4] J. A. Bantara, I. W. Sudarsana, and S. Musdalifah, "Pelabelan Graceful Ganjil Pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang," *J. Ilm. Mat. Dan Terap.*, vol. 15, no. 1, pp. 28–35, 2018, doi: 10.22487/2540766x.2018.v15.i1.10193.
- [5] Maryana and K. A. Sugeng, "Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs," *THETA J. Pendidik. Mat.*, vol. 3, no. 2, pp. 55–58, 2022, doi: <https://doi.org/10.35747/t.v3i2.137>.
- [6] J. Daniel, Z. Zidane Barack, P. Setya Ilham, and K. Ariyanti Sugeng, "Pelabelan Odd-Graceful Pada Graf Produk Sisir (Odd Graceful Labelling on Comb Product Graph)," *Maj. Ilm. Mat. dan Stat.*, vol. 22, no. 1, pp. 30–42, 2022, [Online]. Available: <https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index>
- [7] H. Sumardi, A. Susanta, and T. Alfira Siagian, "Kemampuan Mahasiswa dalam Membuktikan Teorema pada Pelabelan Graceful Graph A-Bintang," *JPMR J. Pendidik. Mat. Raflesia*, vol. 07, no. 01, pp. 35–43, 2022, [Online]. Available: <https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr>
- [8] L. Affifah and I. K. Budayasa, "Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus," *MATHunesa J. Ilm. Mat.*, vol. 11, no. 3, pp. 368–382, 2023.
- [9] G. H. Medika, "Pelabelan Vertex-Graceful Pada Beberapa Graf," in *Prosiding Seminar Nasional STKIP PGRI Sumatera Barat*, 2019, pp. 54–65. [Online]. Available: <http://econference.stkip-pgri-sumbar.ac.id/index.php/matematika/IPME/paper/view/761>
- [10] G. H. Medika and Z. B. Tomi, "Pelabelan vertex-graceful pada graf-(6,8)," vol. 6, no. 1, pp. 63–70, 2022, [Online]. Available: <https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/matheduca/article/view/3479>
- [11] N. Hartsfield and G. Ringel, *Pearls in Graph Theory*. San Diego: Academic Press, 1990.
- [12] T. Wahyuningrum and E. Usada, *Matematika Diskrit : Dan Penerapannya Dalam Dunia Informasi*. Sleman: deepublish, 2019.
- [13] R. Munir, *Matematika Diskrit Edisi ke 7*. Bandung: Informatika, 2020.
- [14] B. R. G and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- [15] S.-M. Lee, Y. C. Pan, and M.-C. Tsai, "On vertex-graceful $(p, p+1)$ -graphs," 2005, p. 172.
- [16] N. Martono, *Metode penelitian kuantitatif : analisis isi dan analisis data sekunder*. Jakarta: Rajawali Pers, 2014.
- [17] Sugiyono, *Metode penelitian kualitatif : (untuk penelitian yang bersifat : eksploratif, enterpretif, interaktif dan konstruktif)*. Bandung: Alfabeta, 2020.